

Die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen wird durch die physikalischen Eigenschaften des Übertragungsmediums bestimmt. Die Kenntnis dieser Eigenschaften ist für das weitere Verständnis der Methoden zur Vorhersage und Kompensation der Effekte wichtig. Ein dominierender Effekt in der Wellenausbreitung ist die Reflexion an Oberflächen von Objekten. Diese wird deshalb im Folgenden als Erstes behandelt. Kantenbeugung und Streuung an rauen und/oder kleinen Flächen schließen sich an. Große Bedeutung für Frequenzen im GHz-Bereich hat die atmosphärische Beeinflussung der Wellenausbreitung, insbesondere durch Regen, aber auch durch Nebel und Gasresonanzen. Eine Besonderheit ist die Wellenausbreitung in der Ionosphäre, mit deren Beschreibung dieses Kapitel schließt.

---

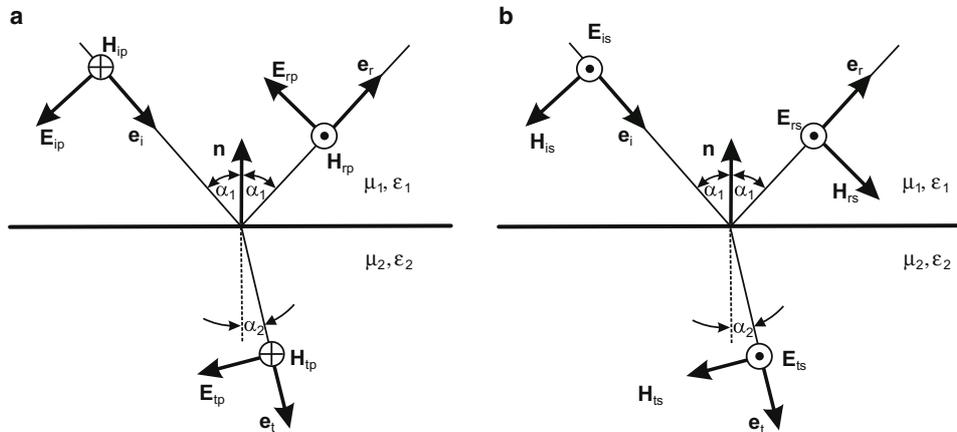
### 2.1 Grenzflächen: Reflexion und Transmission

Reflexionen von Wellen an Objektoberflächen werden vielfach durch solche an unendlich ausgedehnten Halbebenen (ebene Grenzflächen) approximiert. Das ist zulässig, wenn die Wellenlänge klein ist im Verhältnis zur Größe des Objekts und wenn die reflektierte Welle im Nahbereich des Objektes betrachtet wird. Ein genaueres Kriterium hierfür wird in Abschn. 2.4 gebracht.

Die Reflexion an und Transmission durch Grenzflächen kann mit den bekannten polarisationsabhängigen *Fresnel'schen*<sup>1</sup> Reflexions- und Brechungsgesetzen beschrieben werden, die zwar exakt nur für verlustfreie Materialien bzw. bei Verlusten nur für Winkel  $\alpha_1 = 0^\circ$  (s. Abb. 2.1) gelten, näherungsweise aber auch bei schwach verlustbehafteten Materialien für  $\alpha_1 < 90^\circ$  verwendet werden können. Die Reflexions- und Transmissionsfaktoren hängen von der Polarisation ab. Der Index  $p$  bedeutet Polarisation *parallel*

---

<sup>1</sup> Augustin Jean Fresnel (1788–1827) französischer Physiker und Ingenieur.



**Abb. 2.1** Definition der Feldstärkerichtungen bei **a** paralleler und **b** senkrechter Polarisation

zur Reflexionsebene, das ist die Ebene, die durch die Einfall- und Reflexionsrichtung aufgespannt wird, Index  $s$  steht für *senkrecht* zur Reflexionsebene und die Indizes  $i$ ,  $t$  und  $r$  für *einfallende* (engl. incident), *transmittierte* und *reflektierte* Welle, s. Abb. 2.1. In den beiden Abbildungen ist die Reflexionsebene identisch mit der Papierebene. Die Einheitsvektoren  $\mathbf{e}_i$ ,  $\mathbf{e}_t$  und  $\mathbf{e}_r$  geben die Richtungen der einfallenden, transmittierten und reflektierten Wellen an.  $\mathbf{n}$  ist der Einheitsvektor senkrecht zur Grenzfläche, der somit die Lage der Grenzfläche im Raum (nicht die Position) definiert.

Die Materialeigenschaften der beiden Medien, die die Grenzfläche trennt, können für die Wellenausbreitung ausreichend mit der Permeabilität  $\mu$  und Permittivität  $\epsilon$  beschrieben werden. Mit den Stoffkonstanten des Vakuums  $\mu_0$  und  $\epsilon_0$  sowie der relativen Permeabilität  $\mu_r$  und relativen Permittivität  $\epsilon_r$  sind  $\mu = \mu_0 \cdot \mu_r$  und  $\epsilon = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r$ . Bei verlustbehafteten Materialien sind  $\mu_r$  und  $\epsilon_r$  komplex und es gilt  $\mu_r = \mu_r' - j\mu_r''$  und  $\epsilon_r = \epsilon_r' - j\epsilon_r''$  mit den Verlustwinkeln  $\tan \delta_\mu = \mu_r''/\mu_r'$  und  $\tan \delta_\epsilon = \epsilon_r''/\epsilon_r'$ . Für die meisten Materialien, die für die Wellenausbreitung relevant sind, sind die Stoffgrößen linear und die relative Permittivität ist  $\mu_r = 1$ .

Das bekannte Brechungsgesetz nach *Snellius*<sup>2</sup> ist z. B. in [7] zu finden. Der Zusammenhang zwischen den Winkeln der einfallenden und transmittierten Welle lautet im verlustlosen Fall, d. h.  $\epsilon$  und  $\mu$  sind reell:

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \sqrt{\frac{\mu_2 \epsilon_2}{\mu_1 \epsilon_1}}. \quad (2.1)$$

Für die meisten in der Wellenausbreitung vorkommenden Materialien ist die Winkelabhängigkeit unabhängig von der Polarisation. Das gilt aber nicht für die Größe der Feld-

<sup>2</sup> Rudolph Snellius (1546–1613) niederländischer Gelehrter und Mathematiker.

stärken. Die erweiterten Reflexions- und Transmissionsfaktoren betragen bei paralleler Polarisation [7]:

$$r_p = \frac{E_{rp}}{E_{ip}} = \frac{\sqrt{\mu_2/\mu_1 - (\varepsilon_1/\varepsilon_2) \sin^2 \alpha_1} - \sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1} \cdot \cos \alpha_1}{\sqrt{\mu_2/\mu_1 - (\varepsilon_1/\varepsilon_2) \sin^2 \alpha_1} + \sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1} \cdot \cos \alpha_1}, \quad (2.2)$$

$$t_p = \frac{E_{tp}}{E_{ip}} = \frac{2\sqrt{\mu_2/\mu_1} \cdot \cos \alpha_1}{\sqrt{\mu_2/\mu_1 - (\varepsilon_1/\varepsilon_2) \sin^2 \alpha_1} + \sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1} \cdot \cos \alpha_1}, \quad (2.3)$$

und bei senkrechter Polarisation:

$$r_s = \frac{E_{rs}}{E_{is}} = \frac{\sqrt{\mu_2/\mu_1} \cdot \cos \alpha_1 - \sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1 - (\mu_1/\mu_2) \sin^2 \alpha_1}}{\sqrt{\mu_2/\mu_1} \cdot \cos \alpha_1 + \sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1 - (\mu_1/\mu_2) \sin^2 \alpha_1}}, \quad (2.4)$$

$$t_s = \frac{E_{ts}}{E_{is}} = \frac{2\sqrt{\mu_2/\mu_1} \cdot \cos \alpha_1}{\sqrt{\mu_2/\mu_1} \cdot \cos \alpha_1 + \sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1 - (\mu_1/\mu_2) \sin^2 \alpha_1}}. \quad (2.5)$$

$E_i, H_i$  sowie  $E_r, H_r$  und  $E_t, H_t$  – jeweils mit  $p$ - oder  $s$ -Polarisationsindex – sind die komplexen Einhüllenden der einfallenden, reflektierten und transmittierten elektrischen und magnetischen Feldstärken in Höhe der Grenzfläche. Multipliziert mit den zugehörigen Einheitsvektoren ergeben sie die komplexen Feldstärkevektoren für die einfallende, reflektierte und transmittierte Welle.

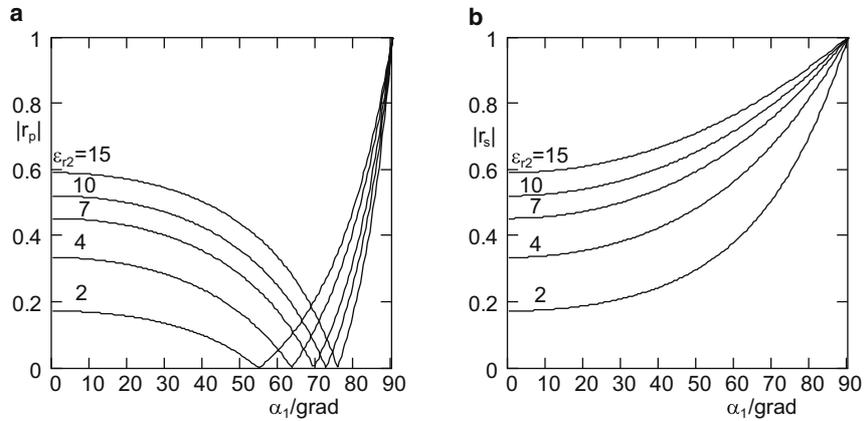
Hier ist zu bemerken, dass die Vorzeichen der Feldstärken, d. h. die Richtungen der Pfeile in Abb. 2.1, in gewissen Grenzen beliebig sind. So können z. B. die Richtungen der einfallenden elektrischen *und* magnetischen Feldstärke umgedreht werden. Es ändern sich dann in (2.2) bis (2.5) die Vorzeichen der Reflexions- und Transmissionsfaktoren. Die hier gewählte Darstellung hat aber den Vorteil, dass im Falle  $\alpha_1 = 0$ , die Richtungen der einfallenden, reflektierten und transmittierten elektrischen Feldstärken übereinstimmen.

Abb. 2.2 zeigt als Beispiel die Beträge der beiden Reflexionsfaktoren  $r_p$  und  $r_s$  als Funktion des Einfallswinkels  $\alpha_1$  beim Einfall einer ebenen Welle aus dem Vakuum ( $\mu_1 = \mu_0, \varepsilon_1 = \varepsilon_0$ ) auf einen dielektrischen Halbraum ( $\mu_2 = \mu_0$ ) für verschiedene relative Permittivitäten. Bei verlustlosem Dielektrikum wird  $r_p$  bei dem sog. *Brewster*<sup>3</sup>-Winkel  $\alpha_B$  mit  $\tan \alpha_B = \sqrt{\varepsilon_{r2}/\varepsilon_{r1}}$  gleich Null. Bei verlustbehaftetem  $\varepsilon_2$  durchfährt  $|r_p|$  in der Nähe des Brewsterwinkels ein Minimum.

In der Technik wird der Effekt des Brewsterwinkels oft genutzt, z. B. in der Optik zur Reduzierung von Reflexionen an spiegelnden Oberflächen durch Polarisationsfilter oder als Brewsterfenster zur reflexionsarmen Ausleitung von Mikrowellenleistung aus Vakuumröhren (Gyratoren). Auch die Evolution in der Biologie nutzte den Effekt: Insekten können mit ihren polarisationserkennenden Augen spiegelnde Wasserflächen ausmachen, da durch den Brewstereffekt die horizontale Polarisation vorherrscht.

Die Wellenausbreitung in innerstädtischen Gebieten wird in abgeschatteten Zonen vorwiegend durch Reflexionen an den Häuserfassaden und weniger durch Bodenreflexionen

<sup>3</sup> Sir David Brewster (1781–1868) schottischer Physiker.



**Abb. 2.2** Die Beträge der Reflexionsfaktoren als Funktion von Einfallswinkel  $\alpha_1$ . Parameter relative Permittivität  $\epsilon_{r2}$ . **a**  $|r_p|$ , **b**  $|r_s|$

bestimmt. Bei horizontaler Polarisation ist wegen des durch den Brewstereffekt gegebenen kleineren Reflexionsfaktors an Häuserfassaden die Reflexionsdämpfung größer und damit die Reichweite kleiner als bei vertikaler Polarisation. Deshalb ist für Basisstationsantennen die vertikale Polarisation vorzuziehen. Zur Vollständigkeit sei erwähnt, dass bei Materialien mit unterschiedlichen Permeabilitäten der Brewstereffekt auch bei senkrechter Polarisation auftreten kann, indem (2.4) zu Null wird. Dieser Fall tritt in der Praxis aber nur selten auf.

Da Reflexion und Transmission polarisationsabhängig sind, muss zu deren Berechnung bei Vorgabe der einfallenden elektrischen Feldstärke diese zunächst in die beiden Anteile mit Index  $p$  und  $s$  zerlegt werden. Nach Multiplikation der Anteile mit den zugehörigen Reflexions- und Transmissionsfaktoren werden die Vektoren der reflektierten bzw. transmittierten Feldstärke aus den Komponenten wieder zusammengesetzt.

Einige Mathematikprogramme beherrschen aber inzwischen die Vektorrechnung. Sie vereinfacht die Programmierung, da für die Reflexion bzw. Transmission jeweils nur eine einzige Gleichung nötig ist, die im Folgenden hergeleitet werden. Die Lage der Grenzfläche im Raum sei nach Abb. 2.1 durch die senkrecht stehende Normale  $\mathbf{n}$  beschrieben. Die Richtung der einfallenden Welle wird durch den Einheitsvektor  $\mathbf{e}_i$  vorgegeben. Die Richtung der zugehörigen elektrischen Feldstärke  $\mathbf{E}_i$  ist dann nicht mehr vollständig frei wählbar, da sie auf  $\mathbf{e}_i$  senkrecht stehen muss, aber ansonsten beliebig ist:  $\mathbf{E}_i \cdot \mathbf{e}_i = 0$ . Wenn  $\mathbf{E}_i$  diese Bedingung erfüllt, was aber im Falle des Fernfeldes einer Antenne per se gilt, erhält man wie im Anhang hergeleitet die vektoriellen elektrischen Feldstärken  $\mathbf{E}_r$  und  $\mathbf{E}_t$ :

$$\mathbf{E}_r = r_s \mathbf{e}_s (\mathbf{e}_s \cdot \mathbf{E}_i) + r_p (\mathbf{e}_s \times \mathbf{e}_r) \cdot [(\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_s) \cdot \mathbf{E}_i], \quad (2.6)$$

$$\mathbf{E}_t = t_s \mathbf{e}_s (\mathbf{e}_s \cdot \mathbf{E}_i) + t_p (\mathbf{e}_t \times \mathbf{e}_s) \cdot [(\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_s) \cdot \mathbf{E}_i]. \quad (2.7)$$

$\mathbf{e}_s$  ist ein Einheitsvektor, der in der Grenzfläche liegt und senkrecht auf  $\mathbf{n}$  und  $\mathbf{e}_i$  steht, s. Abb. 8.6:

$$\mathbf{e}_s = \frac{\mathbf{e}_i \times \mathbf{n}}{|\mathbf{e}_i \times \mathbf{n}|}.$$

Die Einheitsvektoren  $\mathbf{e}_r$  und  $\mathbf{e}_t$  in die Richtungen der reflektierten und transmittierten Wellen betragen, s. (8.36) und (8.40) im Anhang:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r &= \mathbf{e}_i - 2(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}, \\ \mathbf{e}_t &= -\mathbf{n} \sqrt{1 - \frac{\mu_1 \varepsilon_1}{\mu_2 \varepsilon_2} [1 - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_i)^2]} + (\mathbf{n} \times \mathbf{e}_s) \sqrt{\frac{\mu_1 \varepsilon_1}{\mu_2 \varepsilon_2} [1 - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_i)^2]}. \end{aligned}$$

$r_s$  und  $r_p$  sowie  $t_s$  und  $t_p$  sind die o. g. winkel- und polarisationsabhängigen Reflexions- und Transmissionsfaktoren gemäß (2.2–2.5). Die darin enthaltenen Winkelfunktionen können durch  $\mathbf{e}_i$  und die Normale  $\mathbf{n}$  ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned} \cos \alpha_1 &= -\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_i, \\ \sin^2 \alpha_1 &= 1 - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_i)^2. \end{aligned}$$

Mit diesen Beziehungen lassen sich Reflexion und Transmission einer einfallenden ebenen Welle mit beliebiger Polarisation einfach berechnen.

(2.6) und (2.7) enthalten natürlich den Sonderfall  $\alpha_1 = 0$ , für den gilt:  $r_p = r_s = r$  und  $t_p = t_s = t$ . Somit ergibt sich erwartungsgemäß  $\mathbf{E}_r = r \cdot \mathbf{E}_i$  und  $\mathbf{E}_t = t \cdot \mathbf{E}_i$ .

Ein weiterer wichtiger Sonderfall ist die Reflexion an einer gut leitenden Ebene. Im Falle großer Leitfähigkeit  $\kappa$  mit  $\varepsilon_{r2} \approx \kappa / (j\omega\varepsilon_0)$  sind die Reflexionsfaktoren nahezu unabhängig vom Einfallswinkel und betragen  $r_p = r_s = -1$ .

Die Transmission durch Objekte spielt bei der Wellenausbreitung eine wichtige Rolle, z. B. die Durchdringung von Mauerwerk oder die Strahlung durch Fenster und Türen bei der Funkversorgung von Gebäudeinnenräumen. In diesen Fällen verlaufen die Grenzflächen der Objekte überwiegend parallel, so dass eine Berechnung nach dem im Folgenden Abschnitt beschriebenen Verfahren möglich ist.

---

## 2.2 Reflexion und Transmission bei geschichteten Medien

Die Reflexion und Transmission bei geschichteten Medien spielen in der Wellenausbreitung eine große Rolle. Ihre Berechnung wird benötigt

- bei Radomen, den Abdeckungen von Antennen für Richtfunk und Radar,
- im Mobilfunk oder bei WLAN-Systemen zur Modellierung der Wellenausbreitung bei mehrschichtigen Gebäudewänden oder Fenstern (beschichtetes, wärmedämmendes Glas, Mehrscheibenverglasung),

- zur Dimensionierung von optischen Filtern, die sich aus mehreren Schichten zusammensetzen,
- zur Dimensionierung von Brewsterfenstern bei Mikrowellen-Hochleistungsrohren.

Im Folgenden wird ein rekursives Verfahren beschrieben, mit dem man Reflexion und Transmission von ebenen Wellen an geschichteten, ebenen Medien ermitteln kann. Für verlustbehaftete Materialien gelten die gleichen Aussagen wie im vorigen Abschnitt. Wir nehmen zunächst an, dass alle Materialien verlustlos sind.

Das Modell besteht gemäß Abb. 2.3 aus  $N$  Trennebenen mit  $N + 1$  Medien (Schichten), die Medienbereiche mit dem Index 1 bzw.  $N + 1$  gehören dazu. Innerhalb einer Schicht sind die Materialeigenschaften konstant. Es wird eine einfallende ebene Welle in Medium 1 angenommen. Ziel ist die Berechnung der Reflexion in Medium 1 und der Transmission in Medium  $N + 1$ .

Zunächst können recht einfach die Wellenzahlen in den Schichten angegeben werden. Das Koordinatensystem kann um die  $z$ -Achse so gedreht werden, dass die Richtung der einfallenden Welle und damit die Richtungen der Wellen in allen anderen Medien in der Ebene  $x = \text{const.}$  liegen. Die Richtungen werden durch die vektoriellen Wellenzahlen  $\mathbf{k}_n$  definiert. Dann gilt:

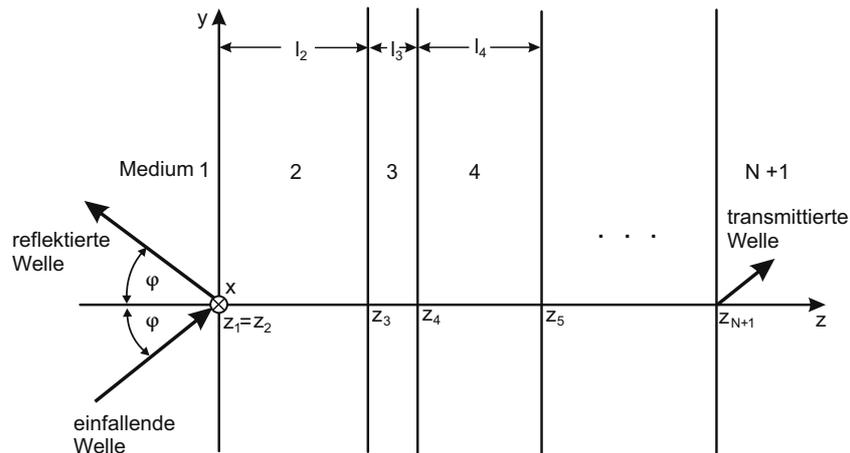
$$\frac{\partial}{\partial x} = 0 \quad \text{und damit } k_x \equiv 0.$$

Die vektoriellen Wellenzahlen der Medien (Index  $n$ ) betragen dann

$$\mathbf{k}_n = k_y \cdot \mathbf{e}_y + \beta_n \cdot \mathbf{e}_z. \quad (2.8)$$

$\beta_n$  ist die Ausbreitungskonstante im Medium  $n$  in  $z$ -Richtung. Das Skalarprodukt ergibt

$$\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{k}_n = k_n^2 = \omega^2 \mu_n \varepsilon_n = k_y^2 + \beta_n^2. \quad (2.9)$$



**Abb. 2.3** Modell eines geschichteten Mediums

$k_y$  ist in allen Medien gleich, d. h. es gilt auch in Medium 1. Man erhält  $k_y$  aus der vorgegebenen Richtung der einfallenden Welle, die mit der  $z$ -Achse den Winkel  $\varphi$  bildet. Daraus folgt unmittelbar:

$$k_y = k_1 \cdot \sin \varphi.$$

Mit Vorgabe der Wellenzahlen  $k_n$  ( $n = 1, \dots, N + 1$ ) erhält man für die Ausbreitungskonstanten in den Medien  $n$  gemäß (2.9):

$$\begin{aligned} \beta_n^2 &= k_n^2 - k_y^2 \quad \text{und somit} \\ \beta_n^2 &= k_n^2 - k_1^2 \cdot \sin^2 \varphi, \quad \text{oder} \\ \beta_n &= \omega \sqrt{\mu_n \varepsilon_n - \mu_1 \varepsilon_1 \sin^2 \varphi}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Bei Vorgabe aller Materialparameter und der Frequenz sind somit alle  $\beta_n$  bekannt. Mit (2.9) kennt man auch die Richtungen der Wellen, insbesondere der Welle am Ausgang, d. h. im Medium  $N + 1$ . Diese Information ist wichtig für die weitere Anwendung z. B. in einem Ray-Tracer, s. Kap. 4.

Als nächster Schritt können nun die Feldstärken in den Schichten ermittelt werden.  $\mathbf{E}_n$  und  $\mathbf{H}_n$  sind die vektoriellen Feldstärken im Medium  $n$  mit  $n = 1, 2, \dots, N + 1$ . Die in  $z$ -Richtung hin- bzw. rücklaufenden Wellen seien mit Index  $p$  bzw.  $r$  gekennzeichnet:

Für die hinlaufende Welle im Medium  $n$  gilt

$$\mathbf{E}_{pn} = \mathbf{E}_{pno} \cdot e^{-jk_y y} \cdot e^{-j\beta_n(z-z_n)} \quad (2.11)$$

mit der komplexen Amplitude  $\mathbf{E}_{pno} = \mathbf{E}_{pn}(y = 0, z = z_n)$  im Medium  $n$ .  $z_n$  sind die Mediengrenzen. Es seien  $z_1 = z_2 = 0$  (s. Abb. 2.3).

Die rücklaufenden Wellen lauten

$$\mathbf{E}_{rn} = \mathbf{E}_{rno} \cdot e^{-jk_y y} \cdot e^{j\beta_n(z-z_n)}. \quad (2.12)$$

Die magnetischen Feldstärkekomponenten können aus den elektrischen Feldstärken berechnet werden. Man erhält

$$\mathbf{H}_{pn} = \frac{\mathbf{k}_n \times \mathbf{E}_{pn}}{k_n \cdot Z_n} \quad \text{und} \quad (2.13)$$

$$\mathbf{H}_{rn} = \frac{-\mathbf{k}_n \times \mathbf{E}_{rn}}{k_n \cdot Z_n} \quad (2.14)$$

mit dem Feldwellenwiderstand  $Z_n = \sqrt{\mu_n / \varepsilon_n}$  und dem Nennerausdruck  $k_n \cdot Z_n = \omega \mu_n$ .

Zur weiteren Berechnung werden die Stetigkeitsbedingungen benötigt: An den Grenzflächen zwischen den Medien sind die tangentialen Feldstärken gleich. Somit gilt an den Grenzflächen mit  $n = 1, \dots, N$  für die elektrischen Feldstärken:

$$\mathbf{E}_n(z_{n+1}) \times \mathbf{e}_z = \mathbf{E}_{n+1}(z_{n+1}) \times \mathbf{e}_z \quad (2.15)$$

und analog für die magnetischen Feldstärken:

$$\mathbf{H}_n(z_{n+1}) \times \mathbf{e}_z = \mathbf{H}_{n+1}(z_{n+1}) \times \mathbf{e}_z. \quad (2.16)$$

Im Folgenden wird die allgemeine Polarisation der einfallenden Welle in die beiden Fälle senkrecht bzw. parallel zu Reflexionsebene aufgeteilt:

**1.  $E_{p1}$  steht senkrecht auf der Reflexionsebene** Abb. 2.4 zeigt den Fall, dass  $E_{p1}$  senkrecht auf der Reflexionsebene steht. Folgende Abkürzungen für die Amplituden der hin- bzw. rücklaufenden Wellen am Anfang jeder Schicht werden eingeführt:

$$P_n \equiv E_{pno} \quad \text{und} \quad R_n \equiv E_{rno}.$$

Die Feldstärke setzt sich aus der hin- und rücklaufenden Welle zusammen. Damit erhält man aus (2.11) und (2.12) für die elektrische Feldstärke im Medium  $n$  mit den o. g. Abkürzungen für  $1 \leq n \leq N + 1$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_n &= \mathbf{E}_{pn} + \mathbf{E}_{rn}, \quad \text{d. h.} \\ \mathbf{E}_n &= \mathbf{e}_x \cdot (P_n \cdot e^{-j\beta_n \cdot (z-z_n)} + R_n \cdot e^{j\beta_n \cdot (z-z_n)}) \cdot e^{-jk_y y}, \end{aligned} \quad (2.17)$$

und analog für die magnetische Feldstärke mit den (2.13) und (2.14):

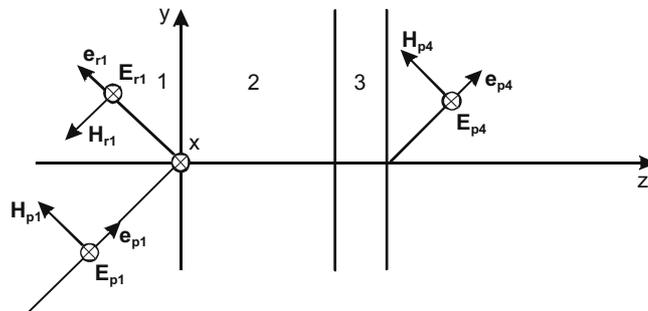
$$\begin{aligned} \mathbf{H}_n &= \mathbf{H}_{pn} + \mathbf{H}_{rn}, \quad \text{d. h.} \\ \mathbf{H}_n &= \frac{e^{-jk_y y}}{\omega \mu_n} [e_y \beta_n \cdot (P_n e^{-j\beta_n \cdot (z-z_n)} - R_n e^{j\beta_n \cdot (z-z_n)}) \\ &\quad - e_z k_y \cdot (P_n e^{-j\beta_n \cdot (z-z_n)} + R_n e^{j\beta_n \cdot (z-z_n)})]. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Mit den Stetigkeitsbedingungen für  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{H}$  gemäß (2.15) und (2.16) ergibt sich hieraus mit den oben eingeführten Abkürzungen für  $n = 1, \dots, N$  mit  $z_{n+1} - z_n = l_n$  (s. Abb. 2.3):

$$P_n \cdot e^{-j\beta_n l_n} + R_n \cdot e^{j\beta_n l_n} = P_{n+1} + R_{n+1}, \quad (2.19)$$

$$P_n \cdot e^{-j\beta_n l_n} - R_n \cdot e^{j\beta_n l_n} = \frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} \cdot \frac{\mu_n}{\mu_{n+1}} (P_{n+1} - R_{n+1}). \quad (2.20)$$

**Abb. 2.4** Richtung der Feldstärken für senkrechte Polarisation



Es ist  $R_{N+1} \equiv 0$ , d. h. im Medium  $N + 1$  wird nur eine fortschreitende Welle angesetzt. Die Auflösung von (2.19) und (2.20) für  $1 \leq n \leq N$  nach  $R_n$  und  $P_n$  ergibt:

$$R_n = \frac{1}{2} P_{n+1} \cdot e^{-j\beta_n l_n} \left( 1 - \frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} \cdot \frac{\mu_n}{\mu_{n+1}} \right) + \frac{1}{2} R_{n+1} \cdot e^{-j\beta_n l_n} \left( 1 + \frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} \cdot \frac{\mu_n}{\mu_{n+1}} \right), \quad (2.21)$$

$$P_n = \frac{1}{2} P_{n+1} \cdot e^{j\beta_n l_n} \left( 1 + \frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} \cdot \frac{\mu_n}{\mu_{n+1}} \right) + \frac{1}{2} R_{n+1} \cdot e^{j\beta_n l_n} \left( 1 - \frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} \cdot \frac{\mu_n}{\mu_{n+1}} \right), \quad (2.22)$$

und speziell für  $n = N$ :

$$R_N = \frac{1}{2} P_{N+1} \cdot e^{-j\beta_N l_N} \left( 1 - \frac{\beta_{N+1}}{\beta_N} \cdot \frac{\mu_N}{\mu_{N+1}} \right), \quad (2.23)$$

$$P_N = \frac{1}{2} P_{N+1} \cdot e^{j\beta_N l_N} \left( 1 + \frac{\beta_{N+1}}{\beta_N} \cdot \frac{\mu_N}{\mu_{N+1}} \right). \quad (2.24)$$

Mit den letzten vier Gleichungen können alle Konstanten rekursiv berechnet werden: Zunächst setzt man in (2.23) und (2.24)  $P_{N+1} = 1$  und legt damit  $R_N$  und  $P_N$  fest. Nun führt mit (2.21) und (2.22) die Rekursion von  $n = N - 1$  bis  $n = 1$  zu  $R_n$  und  $P_n$ .

Der Reflexionsfaktor in Medium 1 ist dann das Verhältnis von  $R_1$  und  $P_1$  an der Stelle  $x = y = z = 0$ :

$$r = \frac{R_1}{P_1}. \quad (2.25)$$

Der Transmissionsfaktor ist das Verhältnis der *elektrischen* Feldstärken der transmittierten ( $x = y = 0; z = z_{N+1}$ ) und einfallenden Welle ( $x = y = z = 0$ ) und lautet analog:

$$t = \frac{P_{N+1}}{P_1}. \quad (2.26)$$

Die Polarisation kann Abb. 2.4 entnommen werden.

Das Verhältnis  $V$  der transmittierten Leistungsdichten zu derjenigen der einfallenden Welle lautet wegen der möglicherweise unterschiedlichen Wellenwiderstände von Medium  $N + 1$  und 1 wie folgt:

$$V = |t|^2 \cdot \frac{Z_1}{Z_{N+1}}.$$

Zusammengefasst sind folgende vier Schritte zu tun:

1.  $P_{N+1} = 1$  setzen.
2. Mit (2.23) und (2.24)  $R_N$  und  $P_N$  berechnen.
3.  $R_n$  und  $P_n$  mit (2.21) und (2.22) rekursiv von  $n = N - 1$  bis  $n = 1$  berechnen.
4. Reflexionsfaktor  $r$  und Transmissionsfaktor  $t$  aus (2.25) und (2.26) bilden.

**2.  $E_{p1}$  ist parallel zur Reflexionsebene** Man berechnet den Reflexions- und Transmissionsfaktor  $r$  und  $t$  mit dem gleichen Verfahren, wie oben beschrieben. Jedoch müssen in (2.21) bis (2.24) die Materialkonstanten  $\mu_n$  durch  $\varepsilon_n$  ersetzt werden. Man erhält mit den Abkürzungen  $P_n \equiv H_{pno}$  und  $R_n \equiv H_{rno}$ :

$$R_n = \frac{1}{2} P_{n+1} \cdot e^{-j\beta_n l_n} \left( 1 - \frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} \cdot \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{n+1}} \right) + \frac{1}{2} R_{n+1} \cdot e^{-j\beta_n l_n} \left( 1 + \frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} \cdot \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{n+1}} \right), \quad (2.27)$$

$$P_n = \frac{1}{2} P_{n+1} \cdot e^{j\beta_n l_n} \left( 1 + \frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} \cdot \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{n+1}} \right) + \frac{1}{2} R_{n+1} \cdot e^{j\beta_n l_n} \left( 1 - \frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} \cdot \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{n+1}} \right) \quad (2.28)$$

und wieder speziell für  $n = N$ :

$$R_N = \frac{1}{2} P_{N+1} \cdot e^{-j\beta_N l_N} \cdot \left( 1 - \frac{\beta_{N+1}}{\beta_N} \cdot \frac{\varepsilon_N}{\varepsilon_{N+1}} \right) \quad (2.29)$$

$$P_N = \frac{1}{2} P_{N+1} \cdot e^{j\beta_N l_N} \cdot \left( 1 + \frac{\beta_{N+1}}{\beta_N} \cdot \frac{\varepsilon_N}{\varepsilon_{N+1}} \right) \quad (2.30)$$

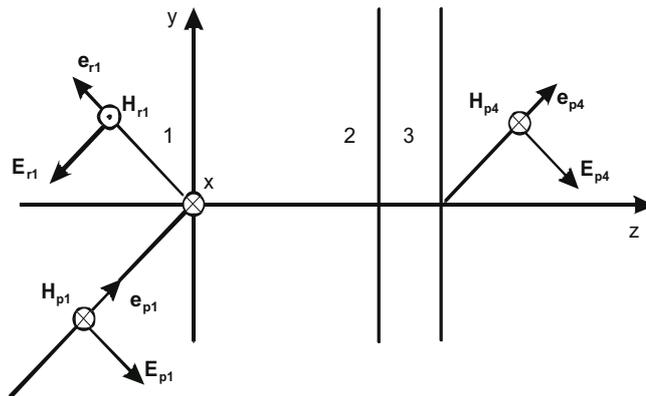
Daraus ergibt sich wie oben durch Rekursion das Verhältnis

$$\frac{R_1}{P_1} = \frac{H_{r1o}}{H_{p1o}}, \quad (2.31)$$

d. h. das Verhältnis der Amplituden der *magnetischen* Feldstärken im Medium 1 an der Grenze zu Medium 2 an der Stelle  $y = 0$ . Den Reflexionsfaktor, wie üblich als Verhältnis der *elektrischen* Feldstärken, erhält man schließlich hieraus unter Beachtung der Polarisation gemäß Abb. 2.5 mit

$$r = -\frac{R_1}{P_1}. \quad (2.32)$$

**Abb. 2.5** Richtung der Feldstärken für parallele Polarisation



Der Transmissionsfaktor, als Verhältnis der *elektrischen* Feldstärken in den Medien  $N + 1$  und 1 lautet:

$$t = \frac{P_{N+1}}{P_1} \cdot \frac{Z_{N+1}}{Z_1}. \quad (2.33)$$

Auch hier ist zu beachten, dass das Verhältnis  $V$  der transmittierten Leistungsdichte zu derjenigen der einfallenden Welle wegen der möglicherweise unterschiedlichen Wellenwiderstände von Medium 1 und  $N + 1$  wie folgt lautet:

$$V = |t|^2 \cdot \frac{Z_1}{Z_{N+1}}. \quad (2.34)$$

Die Herleitungen gelten wie oben erwähnt für verlustlose Materialien. Näherungsweise sind die Ergebnisse auch bei Verlusten gültig, wenn man (2.34) wie folgt ersetzt:

Den Realteil der Leistungsdichte erhält man über den Realteil des Poyntingvektors  $\mathbf{S}$ . Für eine in Richtung  $\mathbf{k}_n$  transportierte Welle in Schicht  $n$  gilt:

$$\operatorname{Re}\{\mathbf{S}\} = \frac{|\mathbf{E}_{pno}|^2}{2} \operatorname{Re} \left\{ \sqrt{\frac{\varepsilon_n}{\mu_n}} \right\}.$$

Somit beträgt das Verhältnis der Realteile der Leistungsdichten von aus- zu eintretender Welle

$$V = |t|^2 \cdot \frac{\operatorname{Re}\{\sqrt{\varepsilon_{N+1}/\mu_{N+1}}\}}{\operatorname{Re}\{\sqrt{\varepsilon_1/\mu_1}\}}. \quad (2.35)$$

Man erkennt, dass (2.35) im Sonderfall verlustloser Materialien in (2.34) übergeht. Falls die Materialien der Medien 1 und  $N + 1$  gleich sind, wenn es sich z. B. um den Freiraum handelt, gehen (2.34) und (2.35) auch bei Verlusten ineinander über und es gilt

$$V = |t|^2.$$

Bei einem Einfallswinkel  $\varphi = 0^\circ$  sind die Ergebnisse auch bei Verlusten exakt. Für  $\varphi > 0^\circ$  erhält man bei Verlusten Näherungen für die Reflexion und Transmission, deren Fehler mit dem Einfallswinkel zunehmen und die bei  $\varphi = 90^\circ$  versagen.

Im Folgenden werden drei Beispiele gezeigt.

**Beispiel 1** Die Reflexion und Transmission einer beidseitig mit Holzvertäfelung versehenen Betonwand sollen untersucht werden. Die Betonwand hat eine Stärke von 12 cm, ihre komplexe Dielektrizitätszahl ist  $\varepsilon_r = 6,16 - j0,3$ . Die Holzverkleidungen betragen jeweils 1,8 cm, für das Holz wird  $\varepsilon_r = 1,6 - j0,25$  angesetzt. Der Einfallswinkel beträgt  $\varphi = 0^\circ$ , d. h. senkrechter Einfall. Der untersuchte Frequenzbereich ist 0–10 GHz.