

Kapitel 2

Eigenschaften von Übertragungskanälen

Im folgenden Kapitel werden die wichtigsten prinzipiellen Einflüsse diskutiert, denen ein Nachrichtensignal bei der Übertragung über einen realen Kanal ausgesetzt ist. Ausgangspunkt bilden die Definitionen idealisierter Systeme. Beginnend mit dem nicht realisierbaren idealen Tiefpass kommt man durch Anwendung von Fensterbewertungen im Zeitbereich zu den so genannten Nyquist-Filtern, die dann später für die verzerrungsfreie digitale Übertragung eine zentrale Rolle spielen. Nach dem Ähnlichkeitssatz der Fourier-Transformation stehen Bandbreite und Zeitdauer in reziprokem Verhältnis zueinander. Für eine bandbreite-effiziente Nachrichtenübertragung ist ein minimales Zeit-Bandbreiteprodukt von besonderem Interesse – die Verhältnisse werden in Abschnitt 2.2 dargestellt. Abschnitt 2.3 bringt dann eine Diskussion der Eigenschaften realer Übertragungskanäle, also linearer und nichtlinearer Verzerrungen, zeitvarianter Einflüsse sowie additiver Störungen. Als ein Beispiel für reale Übertragungsmedien wird schließlich in Abschnitt 2.4 der Funkkanal betrachtet. Zum einen ergibt sich hier infolge von Mehrwegeausbreitung eine frequenzabhängige Übertragungscharakteristik – so genannte *Frequenzselektivität* – zum anderen führen die bekannten Fading-Einflüssen zu zeitvariantem Verhalten.

2.1 Approximation idealisierter Übertragungskanäle

2.1.1 Der ideale Tiefpass

Das Sendesignal $x(t)$ durchlaufe ein lineares System, das durch die Impulsantwort $h(t)$ bzw. die Übertragungsfunktion $H(j\omega)$ charakterisiert wird; am Ausgang erscheint das Empfangssignal $y(t)$.

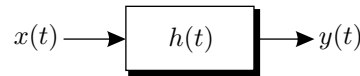


Bild 2.1.1: Lineares, zeitinvariantes Übertragungssystem

Setzt man für die Verzerrungsfreiheit eines Übertragungsmediums die strenge Definition einer formgetreuen Übertragung, bei der nur ein konstanter Skalierungsfaktor a und eine konstante Verzögerung t_0 zugelassen werden

$$y(t) \stackrel{!}{=} a \cdot x(t - t_0), \quad (2.1.46a)$$

so muss für die Impulsantwort bzw. die Übertragungsfunktion des Kanals gelten

$$h_{\text{ideal}}(t) = a \cdot \delta_0(t - t_0) \quad \circ \text{---} \bullet \quad H_{\text{ideal}}(j\omega) = a \cdot e^{-j\omega t_0} \quad \forall \omega \in \mathbb{R}. \quad (2.1.46b)$$

Ein solcher Kanal beinhaltet die unrealistische Eigenschaft einer unendlichen Bandbreite. Bezieht man eine Bandbegrenzung ein und fordert im Übertragungsbereich die oben diskutierten idealen Eigenschaften, so kommt man zum *idealen Tiefpass*¹.

$$H_{\text{id.TP}}(j\omega) = \begin{cases} a \cdot e^{-j\omega t_0} & \text{für } |\omega| < 2\pi f_{\text{Nyq}} \\ \frac{a}{2} \cdot e^{-j\omega t_0} & \text{für } |\omega| = 2\pi f_{\text{Nyq}} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.1.3a)$$

$$\begin{aligned} h_{\text{id.TP}}(t) &= 2a \cdot f_{\text{Nyq}} \cdot \frac{\sin(2\pi f_{\text{Nyq}}(t - t_0))}{2\pi f_{\text{Nyq}}(t - t_0)} = \frac{a}{T} \cdot \text{si}\left(\frac{\pi}{T}(t - t_0)\right) \\ &\quad \text{mit } f_{\text{Nyq}} \triangleq \frac{1}{2T} \end{aligned} \quad (2.1.3b)$$

Die Gleichungen (2.1.3a) und (2.1.3b) beschreiben ein nichtkausales System, welches nicht realisierbar ist. Ein realisierbares System ergibt sich erst nach einer zeitlichen Begrenzung der Impulsantwort derart, dass diese für $t < 0$ verschwindet. Dazu führen wir eine Fensterfunktion $w(t)$ ein mit den Eigenschaften

$$\begin{aligned} w(t) &= w(-t) \quad \circ \text{---} \bullet \quad W(j\omega) \in \mathbb{R}, \\ w(t) &= 0 \quad \text{für } |t| > t_0. \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

¹ f_{Nyq} bezeichnet hier die *Nyquistfrequenz*, deren Bedeutung im nachfolgenden Abschnitt erläutert wird.

Hieraus gewinnt man mit²

$$\begin{aligned} h_{\text{Nyq}}(t) &= h_{\text{id.TP}}(t) \cdot w(t - t_0) \\ &= \begin{cases} 2f_N \cdot a \cdot w(t - t_0) \cdot \text{si}(\omega_{\text{Nyq}}(t - t_0)) & \text{für } 0 \leq t \leq 2t_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.1.5) \end{aligned}$$

eine kausale Impulsantwort. Die Fensterbewertung führt zu einer Verzerrung des Betrages dieser Übertragungsfunktion, nicht aber des Phasengangs: Das System bleibt unter der Bedingung (2.1.4) linearphasig. Gebräuchliche Fensterfunktionen sind z.B. (vgl. [KK12])

- Rechteckfenster
- Hamming- und Hannfenster
- Papoulisfenster
- Kaiserfenster
- Dolph-Tschebyscheff-Fenster.

Im **Bild 2.1.2** sind zwei Beispiele wiedergegeben, wobei die verschiedenen Impulsantworten und Betragsfrequenzgänge einander gegenübergestellt sind. Die Länge der Fensterfunktion wurde in beiden Fällen mit $2t_0 = 8T = 4/f_{\text{Nyq}}$ festgelegt.

2.1.2 Die erste Nyquist Bedingung

Allen Impulsantworten, die aus der Fensterbewertung von si-Funktionen hervorgegangen sind, ist gemeinsam, dass sie äquidistante Nullstellen zu den Zeitpunkten³

$$t_\nu = t_0 \pm \nu \cdot \frac{1}{2f_{\text{Nyq}}} = t_0 \pm \nu \cdot T, \quad \nu = 1, 2, 3, \dots \quad (2.1.6)$$

aufweisen (die Fensterbewertung verändert die durch die si-Funktion festgelegten Nulldurchgänge nicht). Daraus lässt sich eine allgemeine Eigenschaft der hier betrachteten Kanäle für beliebige Formen der Fensterfunktionen ableiten.

Tastet man die Impulsantworten mit einer Abtastfrequenz

$$f_A = 1/T = 2 \cdot f_{\text{Nyq}}$$

ab, so ergibt sich die Abtastfolge

$$h_{\text{Nyq}}(kT) = 2a \cdot f_{\text{Nyq}} \cdot w(kT - t_0) \cdot \frac{\sin(\pi(k - t_0/T))}{\pi(k - t_0/T)}. \quad (2.1.7)$$

²Der Index „Nyq“ soll darauf hindeuten, dass es sich bei einer gefensternten *si*-Impulsantwort um ein *Nyquistfilter* handelt, dessen Eigenschaften im Weiteren erläutert werden.

³Es gilt die Festlegung $f_{\text{Nyq}} \triangleq \frac{1}{2T}$ gemäß Gl. 2.1.3b.

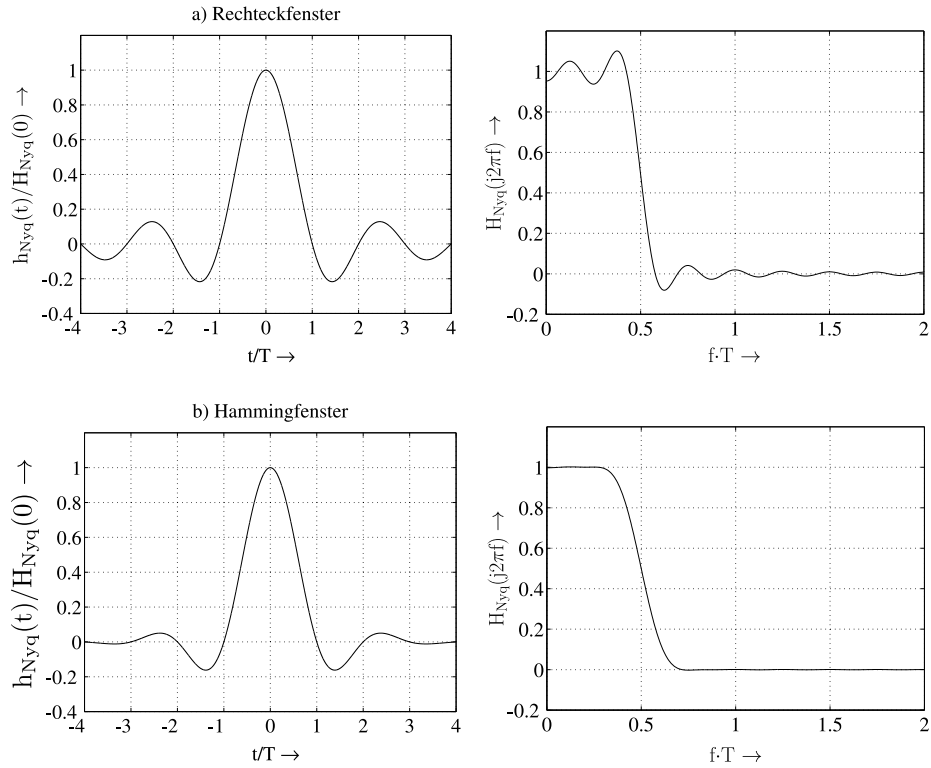


Bild 2.1.2: Linearphasige Tiefpässe, denen die Fensterfunktionen
a) Rechteck, b) Hamming zugrunde liegen

In der nachfolgenden Herleitung wird die Verzögerungszeit $t_0 = 0$ gesetzt, also eine nicht-kausale Formulierung zugrunde gelegt; Kausalität kann stets durch zeitliche Verschiebung um die halbe Länge der Impulsantwort hergestellt werden kann. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit gilt also mit $t_0 = 0$ und $a \cdot w(0) = 1$

$$h_{\text{Nyq}}(kT) = \begin{cases} 2f_{\text{Nyq}} & \text{für } k = 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (2.1.8a)$$

Die zugehörige zeitdiskrete Fourier-Transformierte nach (1.2.2a), Seite 7, lautet

$$H_{\text{Nyq}}(e^{j\Omega}) = 2f_{\text{Nyq}} \quad \text{mit } \Omega = \omega \cdot T. \quad (2.1.8b)$$

Andererseits gilt für das Spektrum einer aus $h_{\text{Nyq}}(t)$ gewonnenen Abtastfolge gemäß dem Abtasttheorem⁴

$$H_{\text{Nyq}}(e^{j\Omega}) = f_A \sum_{i=-\infty}^{\infty} H_{\text{Nyq}}(j(\omega - 2\pi f_A \cdot i)), \quad f_A = 2f_{\text{Nyq}}, \quad (2.1.9)$$

⁴ $H_{\text{Nyq}}(j\omega) \in \mathbb{R}$, da die Fensterfunktion $w(t)$ gerade angesetzt wurde.

so dass der Vergleich von (2.1.8b) und (2.1.9) die folgende Beziehung liefert

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} H_{\text{Nyq}}(j(\omega - 2 \cdot \omega_{\text{Nyq}} \cdot i)) = 1. \quad (2.1.10)$$

Diese Bedingung gilt allgemein für alle Übertragungssysteme, die aus dem idealen Tiefpass (Grenzfrequenz f_{Nyq}) durch Fensterbewertung der Impulsantwort hervorgegangen sind. Man bezeichnet sie als **erste Nyquistbedingung**, die in engem Zusammenhang mit dem Abtasttheorem steht. Zentrale Bedeutung hat diese Nyquistbedingung für die digitale Übertragung über bandbegrenzte Kanäle; im Abschnitt 7.1.3 werden wir hierauf zurückkommen.

Die Beziehung (2.1.10) soll im folgenden noch anschaulich interpretiert werden. Wird die zeitliche Ausdehnung der Fensterfunktion $w(t)$ hinreichend groß angesetzt, so kann näherungsweise

$$H_{\text{Nyq}}(j\omega) \approx 0 \quad \text{für } |f| \geq 2f_{\text{Nyq}} \quad (2.1.11)$$

gesetzt werden (vgl. Bild 2.1.2). Unter dieser Bedingung verbleiben von der Summe in (2.1.10) nur zwei Terme:

$$H_{\text{Nyq}}(j\omega) + H_{\text{Nyq}}(j(\omega - 2\omega_{\text{Nyq}})) = 1 \quad \text{für } 0 \leq \omega \leq 2\omega_{\text{Nyq}}, \quad (2.1.12a)$$

$$H_{\text{Nyq}}(j\omega) + H_{\text{Nyq}}(j(\omega + 2\omega_{\text{Nyq}})) = 1 \quad \text{für } -2\omega_{\text{Nyq}} \leq \omega \leq 0. \quad (2.1.12b)$$

Hieraus ist unmittelbar eine allgemein gültige Symmetriebedingung bezüglich der Frequenz ω_{Nyq} herzuleiten. Wir betrachten den Frequenzbereich

$$0 \leq \omega \leq 2\omega_{\text{Nyq}}$$

und bedenken dabei, dass für negative Frequenzen stets die entsprechenden Aussagen gelten. Aus (2.1.12a) folgt

$$\begin{aligned} H_{\text{Nyq}}(j\omega) &= 1 - H_{\text{Nyq}}(j(\omega - 2\omega_{\text{Nyq}})) \\ &= 1 - H_{\text{Nyq}}(j(2\omega_{\text{Nyq}} - \omega)); \end{aligned} \quad (2.1.13)$$

da $H_{\text{Nyq}}(j\omega)$ wegen der als gerade angenommenen Fensterfunktion reell ist, gilt $H_{\text{Nyq}}(j\omega) = H_{\text{Nyq}}(-j\omega)$. Substituiert man noch

$$\omega = \omega_{\text{Nyq}} + \Delta\omega \quad ; \quad -\omega_{\text{Nyq}} \leq \Delta\omega \leq \omega_{\text{Nyq}},$$

so ergibt sich die folgende Symmetriebedingung

$$H_{\text{Nyq}}(j(\omega_{\text{Nyq}} + \Delta\omega)) = 1 - H_{\text{Nyq}}(j(\omega_{\text{Nyq}} - \Delta\omega)), \quad -\omega_{\text{Nyq}} \leq \Delta\omega \leq \omega_{\text{Nyq}}, \quad (2.1.14)$$

die in **Bild 2.1.3** verdeutlicht wird.

- *Übertragungssysteme, deren Impulsantworten äquidistante Nullstellen im Abstand $T = 1/2f_{\text{Nyq}}$ aufweisen, bezeichnet man als Nyquistsysteme. Sind sie zusätzlich linearphasig und auf das Intervall $|f| < 2f_{\text{Nyq}}$ bandbegrenzt, so weist die Übertragungsfunktion eine Flankensymmetrie bezüglich der „Nyquistfrequenz“ $f_{\text{Nyq}} = 1/(2T)$ auf. Man spricht dann von einer Nyquistflanke.*

Tiefpässe, die auf einer Fensterbewertung der Impulsantwort eines idealen Tiefpasses basieren, sind grundsätzlich Nyquistsysteme. **Bild 2.1.4** verdeutlicht dies anhand einer Rechteck- und einer Hamming-Fensterung.

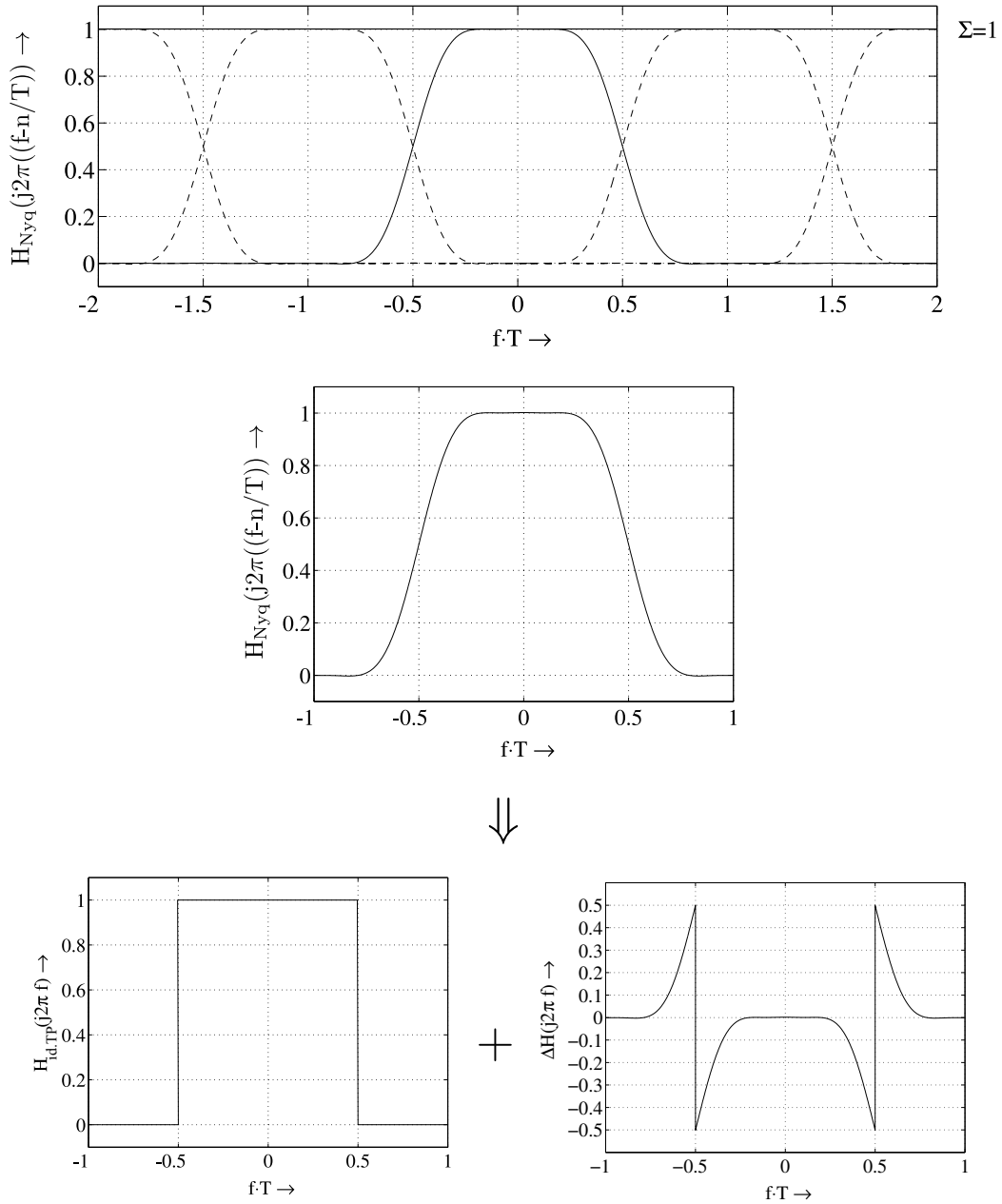


Bild 2.1.3: Erste Nyquistbedingung im Spektralbereich

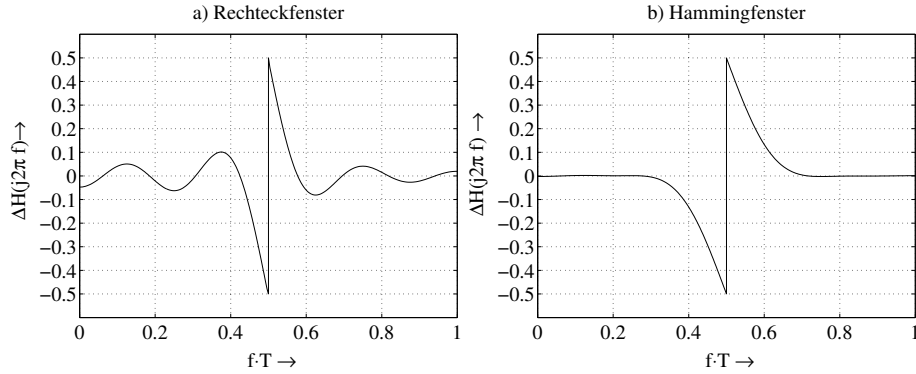


Bild 2.1.4: Interpretation der Tiefpässe nach Bild 2.1.2 als Nyquistfilter: $\Delta H(j\omega)$ für a) Rechteckfenster, b) Hammingfenster

2.1.3 Filter mit Kosinus-roll-off-Flanke

Zur digitalen Signalübertragung sind Impulsformungsfiler gebräuchlich, die eine kosinusförmige Flanke vom Durchlass- in den Sperrbereich aufweisen. Wir benutzen wieder eine nichtkausale Darstellung, indem die Verzögerung der Impulsantwort $t_0 = 0$ gesetzt wird.

$$H_c(j\omega) = \begin{cases} 1 & \text{für } \frac{|\omega|}{\omega_{\text{Nyq}}} \leq 1 - r \\ \frac{1}{2} \left[1 + \cos \left[\frac{\pi}{2r} \left(\frac{|\omega|}{\omega_{\text{Nyq}}} - (1 - r) \right) \right] \right] & \text{für } 1 - r \leq \frac{|\omega|}{\omega_{\text{Nyq}}} \leq 1 + r \\ 0 & \text{für } \frac{|\omega|}{\omega_{\text{Nyq}}} \geq 1 + r \end{cases}$$

$$h_c(t) = 2f_{\text{Nyq}} \cdot \frac{\sin(\omega_{\text{Nyq}} t)}{\omega_{\text{Nyq}} t} \cdot \frac{\cos(r\omega_{\text{Nyq}} t)}{1 - (4r f_{\text{Nyq}} t)^2} \quad (2.1.15)$$

Man nennt solche Impulsformer *Kosinus-roll-off-Filter*; der Parameter r beschreibt die Breite des Übergangs vom Durchlass- in den Sperrbereich, also die Flankensteilheit. Er wird als *Roll-off-Faktor* bezeichnet; $r = 0$ beschreibt den idealen Tiefpass, $r = 1$ die reine Kosinusflanke.

Aufgrund der angesetzten Symmetrie der Filterflanke ist für alle Werte von r die erste Nyquistbedingung erfüllt: Die Impulsantwort (2.1.15) zeigt äquidistante Nullstellen zu den Zeitpunkten $t_\nu = \pm \nu / 2f_{\text{Nyq}}$; $\nu = 1, 2, 3, \dots$

In den **Bildern 2.1.5a-c** sind die Frequenzgänge und die zugehörigen Impulsantworten für verschiedene Roll-off-Faktoren dargestellt. Man erkennt, dass offenbar ein Zusammenhang zwischen der Filterbandbreite und der Form der Impulsantwort besteht: Schmalbandige Filter führen zu starken Überschwängern vor und nach dem Hauptimpuls, während bei breitbandigen Systemen Vor- und Nachschwinger deutlich abgeschwächt sind.

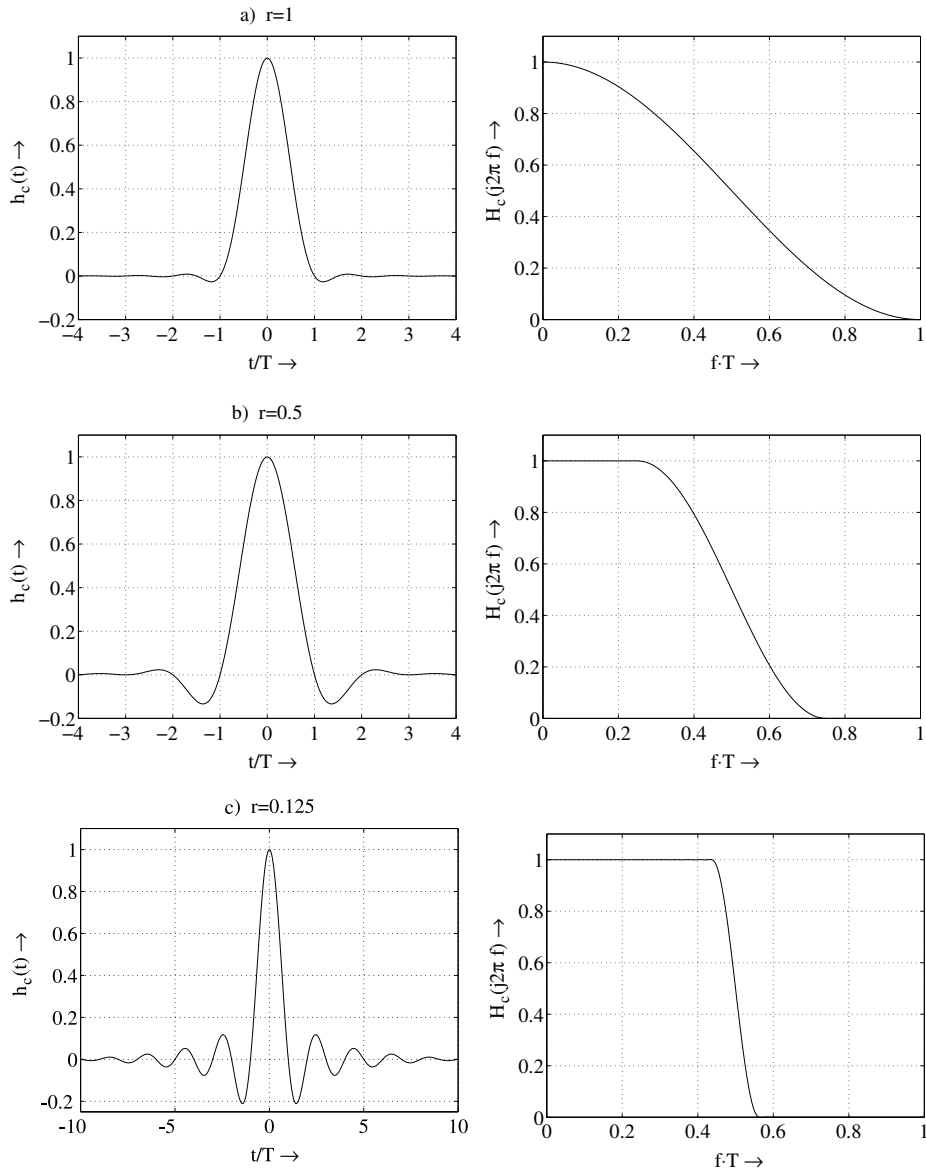


Bild 2.1.5: Kosinus-roll-off-Filter

Versteht man unter Verzerrungsfreiheit die strenge Forderung, dass das Spektrum des Signal innerhalb der Übertragungsbandbreite nicht beeinflusst wird, dann führt dies zu nicht realisierbaren Systemen. Werden realisierbare Approximationen einbezogen, so ergeben sich zwar linearphasige, jedoch mit Verfälschungen des Betragsfrequenzgangs be-

haftete Systeme; in Abschnitt 7.1.3 wird gezeigt, dass die hier abgeleiteten Nyquistsysteme die strenge Forderung der Verzerrungsfreiheit bei digitaler Übertragung erfüllen.

2.2 Zeitdauer-Bandbreite-Produkt

Im letzten Abschnitt wurde deutlich, dass die Form der Impulsantwort von Übertragungskanälen mit der Bandbreite des Systems zusammenhängt. Wir wollen hier versuchen, eine allgemein gültige Gesetzmäßigkeit zwischen der Bandbreite eines Kanals und der zeitlichen Dauer seiner Impulsantwort herzustellen. Dabei besteht zunächst die Schwierigkeit, die Bandbreite wie auch die Zeitdauer geeignet zu definieren, denn prinzipiell besitzen streng bandbegrenzte Systeme eine unendlich lange Impulsantwort; andererseits führen Impulse endlicher Länge zu unendlich ausgedehnten Spektren. Wir setzen zunächst einen Kanal mit einer reellen, geraden, also nichtkausalen Impulsantwort

$$h(t) = h(-t)$$

an, die ihr Maximum im Zeitnullpunkt hat. Die zugehörige Übertragungsfunktion $H(j\omega)$ ist reell. Als Zeitdauer T wird nun die Breite eines Rechteckimpulses der Höhe $h(0)$

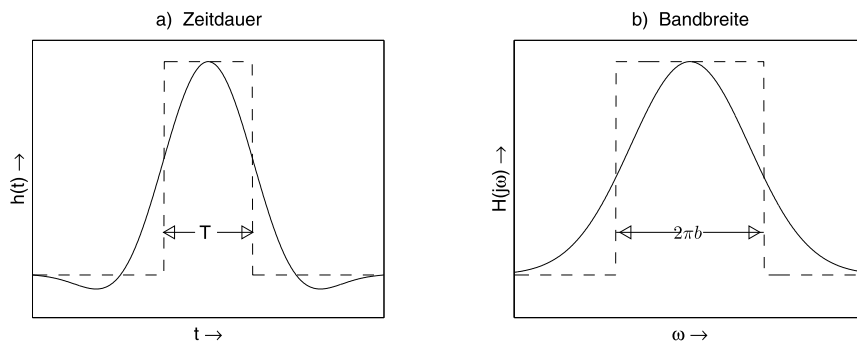


Bild 2.2.1: Einfache Definition von Zeitdauer und Bandbreite

definiert, dessen Fläche mit der der betrachteten Impulsantwort übereinstimmt.

$$T = \frac{1}{h(0)} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} h(t) dt \quad (2.2.1a)$$

Entsprechend wird die Bandbreite b definiert

$$2\pi b = \frac{1}{H(0)} \int_{-\infty}^{\infty} H(j\omega) d\omega. \quad (2.2.1b)$$

$H(j\omega)$ und $h(t)$ hängen über die Fourier-Transformation zusammen, für die in (2.2.1a) und (2.2.1b) enthaltenen Integrale gilt dementsprechend

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(t) dt = H(0) \quad (2.2.2a)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(j\omega) d\omega = h(0). \quad (2.2.2b)$$

Damit folgt aus (2.2.2a) und (2.2.2b)

$$b \cdot T = 1. \quad (2.2.3)$$

- *Das Produkt aus Bandbreite und Zeitdauer (im Sinne der obigen Definitionen) ist eine Konstante. Diese Aussage ist von fundamentaler Bedeutung für die Nachrichtenübertragung.*

Wir haben die Konstanz des Zeitdauer-Bandbreite-Produktes auf der Grundlage einer sehr groben Definition der Größen T und b abgeleitet: An die Form der betrachteten Impulse wurden einschränkende Bedingungen geknüpft, die im Allgemeinen nicht erfüllt sind (z.B. gerade Funktionen für $h(t)$). Das prinzipielle Ergebnis der Reziprozität zwischen Bandbreite und Zeitdauer erweist sich jedoch auch auf der Basis anderer Definitionen der Größen als richtig. Wir betrachten hierzu eine Zeitdauer-Festlegung, die im Sinne eines Moments zweiter Ordnung definiert ist. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wird die Energie des Impulses auf eins normiert.

$$\int_{-\infty}^{\infty} h^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2 d\omega = 1 \quad (2.2.4)$$

Im übrigen sollen für den Impuls $h(t)$ weitgehend beliebige Eigenschaften zugelassen werden, wir fordern nur, dass die Funktionen

$$t \cdot h(t) \quad \text{und} \quad \omega \cdot |H(j\omega)|$$

quadratisch integrierbar sind. Außerdem legen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit den Zeitmaßstab so fest, dass der Schwerpunkt des Impulses im Zeitnullpunkt liegt.

$$\int_{-\infty}^{\infty} t \cdot h^2(t) dt = 0 \quad (2.2.5)$$

Dann lauten die Definitionen der Zeitdauer und der Bandbreite [Pap62], [Sch91]

$$T = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} t^2 \cdot h^2(t) dt} \quad (2.2.6a)$$

$$2\pi b = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 \cdot |H(j\omega)|^2 d\omega}. \quad (2.2.6b)$$